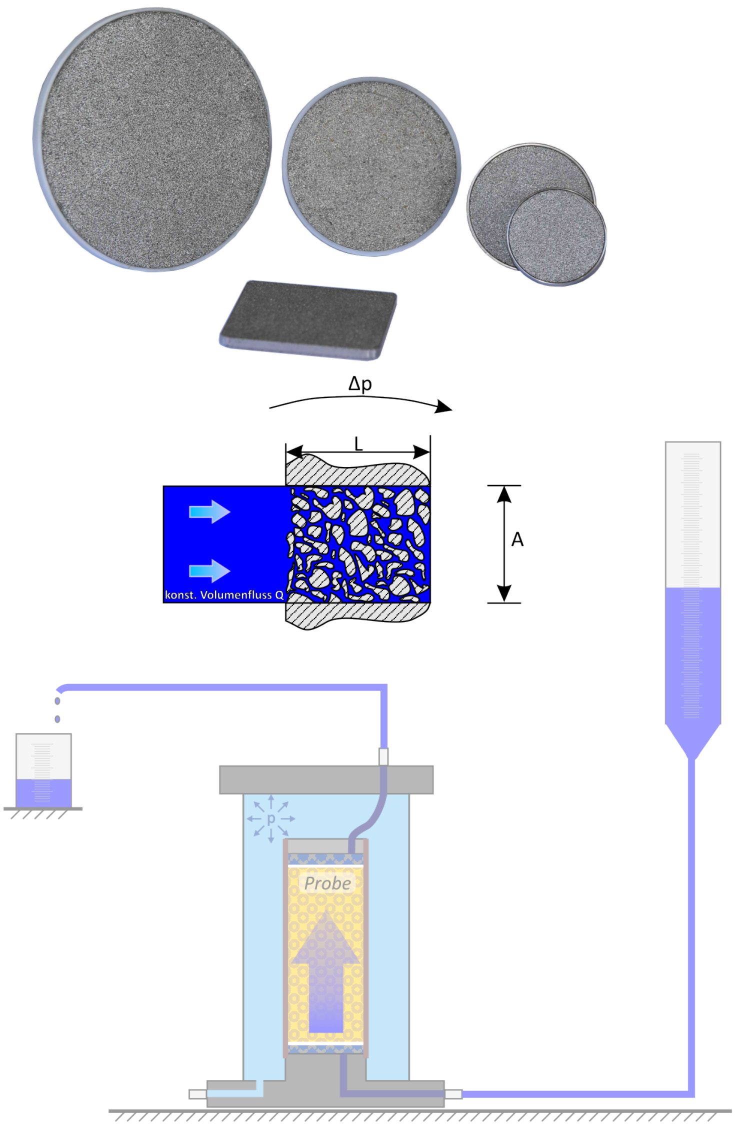
Einfluss von Filtersteinen und Berechnung des Durchlässigkeitsbeiwertes k_f in geotechnischen Versuchsanordnungen

Matthias Pamler

- 2018 -

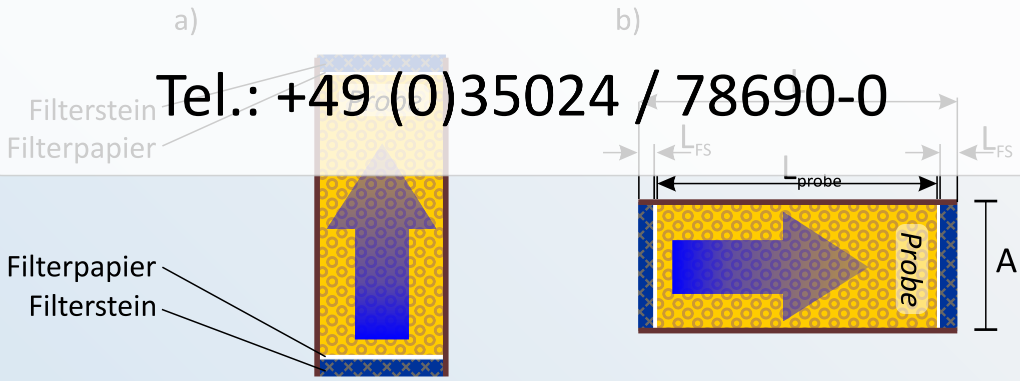


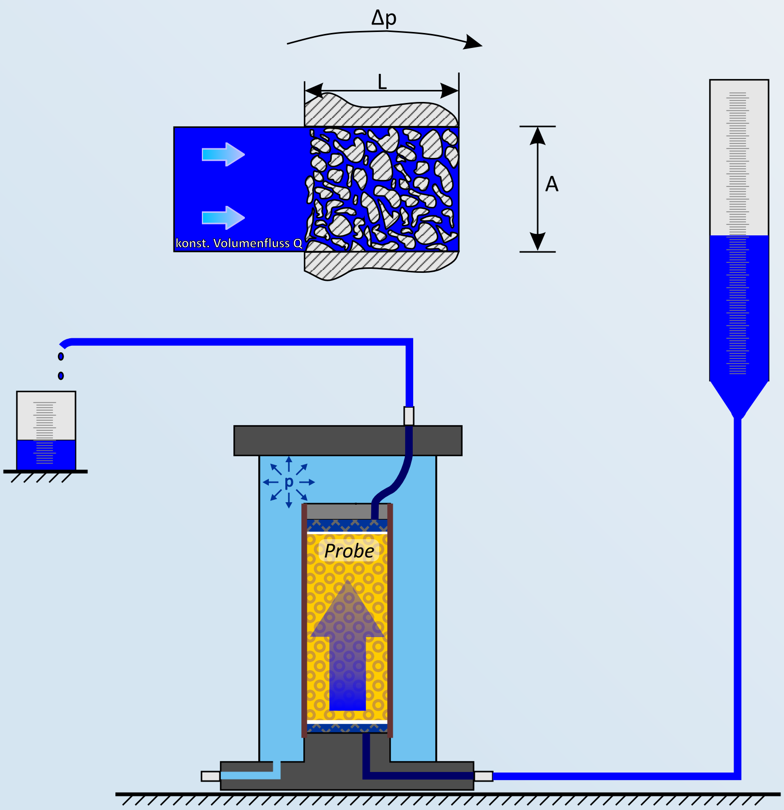
Inhaltsverzeichnis

Vollständiges Dokument
auf Anfrage erhältlich

www.geomation.de
info@geomation.de

Tel.: +49 (0)35024 / 78690-0





4.2.2 Herleitung der Gleichung zur Bestimmung von k_f

Stellt man Gleichung 19 (Auf Grundlage des in Abbildung 9 gezeigten Aufbaus) nach Q um[7], so erhält man den in Gleichung 20 dargestellten Zusammenhang zwischen Q und h.

$$Q = \frac{A_{Probe}}{L} \cdot k_f \cdot h \tag{20}$$

Weiterhin ist aus der Abbildung 9 zu erkennen, dass der Füllstand h vom Wasservolumen im Standrohr abhängig ist. Es gilt[8] $h = \frac{V}{A_{Standrohr}}$. Betrachtet man lediglich die Änderung der Füllstandshöhe in Abhängigkeit der Volumenänderung, so ergibt sich der in Gleichung 21 gezeigte Sachverhalt.

$$\frac{dV}{dh} = A_{Standrohr} \tag{21}$$

Der Volumenfluss Q beschreibt allgemein die Änderung des Volumens. Somit gilt: $Q = \frac{dV}{dt}$. Ersetzt man dV durch die in Gleichung 21 gezeigte Abhängigkeit, so ergibt sich Gleichung 22.

$$Q = A_{Standrohr} \cdot \frac{dh}{dt} \tag{22}$$

Das Wasser fließt in dieser Anordnung aus dem Standrohr durch die Probe in das Becherglas, d.h. der Volumenfluss aus dem Standrohr ist gleich dem Volumenfluss in (und durch) die Probe. Damit kann man Gleichung 20 und Gleichung 22 unter Berücksichtigung der Flussrichtung des Wassers gleichsetzen und erhält die in Gleichung 23 gezeigte Differentialgleichung.

$$\frac{A_{Probe}}{L} \cdot k_f \cdot h = -A_{Standrohr} \cdot \frac{dh}{dt} \tag{23}$$

Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung 23 gibt an, dass es sich beim Standrohr um einen Volumenabfluss handelt.

Es gibt nun verschiedene Varianten diese Differentialgleichung 1. Ordnung zu lösen. In diesem Fall bietet sich die Lösung über die Trennung der (Differenziation-) Variablen an. Dazu wird Gleichung 23 so umgestellt, dass sich die Größen h und Δh auf einer Seite dieser Gleichung befinden[9]. Somit ergibt sich nach einigen Zwischenschritten die Lösung der Differentialgleichung.

$$-\frac{A_{Probe}}{A_{Standrohr} \cdot L} \cdot k_f \cdot dt = \frac{1}{h} \cdot dh \tag{24}$$

[7]Die „ Δ“-Symbole vor L und h wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt, denn L beschreibt die „Länge“, also den Weg den das Wasser durch die Probe zurücklegen muss (Probenhöhe) und h bezeichnet die Füllhöhe des Standrohrs gegenüber der Auslaufhöhe der Messzelle.

[8]Es wird nur der Bereich des Standrohrs betrachtet, bei dem eine konstante Querschnittsfläche vorliegt.

[9]Die anderen Größen werden gegenübergestellt.

Der Integrale Übergang ergibt:

$$-\frac{A_{probe}}{A_{Standrohr} \cdot L} \cdot k_f \cdot \int dt = \int \frac{1}{h} \cdot dh \tag{25}$$

Die Lösung der unbestimmten Integrale ist in Gleichung 26 dargestellt:

$$-\frac{A_{probe} \cdot k_f}{A_{Standrohr} \cdot L} \cdot t = ln(h) \tag{26}$$

Zur Vereinfachung der Darstellung wird eine neue Variable τ verwendet, mit:

$$\tau = \frac{A_{Standrohr} \cdot L}{A_{probe} \cdot k_f} \tag{27}$$

Diese Variable τ wird bei zeitveränderlichen Zusammenhängen dieser Art auch ZEITKONSTANTE genannt. Damit vereinfacht sich Gleichung 26 zu:

$$ln(h) = -\frac{t}{\tau} \tag{28}$$

Löst man Gleichung 28 nach h auf, so erhält man den qualitativen zeitlichen Verlauf: $h = e^{-\frac{t}{\tau}}$. Grundlage für diese Lösung ist Gleichung 22, die jedoch nur die zeitliche Änderung der Füllhöhe im Standrohr beschreibt. Auch beim Lösen der Integrale (vgl. Gleichung 26) wurde auf die formale Konstante „c“ verzichtet. Die Anfangsbedinung (zum Zeitpunkt $t = 0$) blieb dadurch bisher unberücksichtigt. Deshalb ist das Ergebnis mit der Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$, in diesem Fall mit der Füllhöhe[10] h_0, zu multiplizieren. Damit lässt sich der zeitlicher Verlauf der Füllhöhe mit Gleichung 29 vollständig beschreiben.

$$h(t) = h_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{29}$$

mit:

$h(t)$	...	zeitlicher Verlauf der Füllstandshöhe im Standrohr
h_0	...	Füllstandshöhe zum Zeitpunkt $t = 0$
t	...	Zeit seit Beginn der Messung
τ	=	$\frac{A_{Standrohr} \cdot L}{A_{probe} \cdot k_f}$

4.2.3 Praktische Ermittlung von k_f bei einem Versuchsstand mit veränderlicher Höhe

Auf Grundlage von Gleichung 29 erkennt man bereits, dass es sich um eine abklingende $e - Funktion$ handelt. Um den Durchlässigkeitsbeiwert k_f zu ermitteln, benötigt man zu verschiedenen Zeitpunkten die Füllstandshöhe. Im Idealfall reichen dafür

[10] Füllhöhe des Standrohrs

zwei Messpunkte aus. Es empfiehlt sich jedoch mehrere Messpunkte zu ermitteln, um die Ergebnisse zu validieren. Es gilt:

$$h(t_1) = h_0 \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}} \tag{30}$$

$$h(t_2) = h_0 \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau}} \tag{31}$$

Die Division beider Gleichung ergibt Gleichung 32.

$$\frac{h(t_1)}{h(t_2)} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{e^{-\frac{t_2}{\tau}}} \tag{32}$$

Logarithmiert man Gleichung 32 erhält man nach den gezeigten Zwischenschritten[11] die Gleichung zur Berechnung des Durchlässigkeitsbeiwertes k_f.

$$ln(\frac{h_1}{h_2}) = ln(\frac{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{e^{-\frac{t_2}{\tau}}}) \tag{33}$$

$$ln(\frac{h_1}{h_2}) = \frac{t_2 - t_1}{\tau} \tag{34}$$

$$\tau = \frac{(t_2 - t_1)}{ln(\frac{h_1}{h_2})} \tag{35}$$

$$\frac{A_{Standrohr} \cdot L}{A_{Probe} \cdot k_f} = \frac{(t_2 - t_1)}{ln(\frac{h_1}{h_2})} \tag{36}$$

$$k_f = \frac{A_{Standrohr} \cdot L}{A_{Probe}} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot ln(\frac{h_1}{h_2}) \tag{37}$$

mit:

L	...	Probenhöhe
$A_{Standrohr}$	...	Querschnittsfläche des Standrohrs
A_{Probe}	...	Querschnittsfläche der Probe
t_1	...	Zeitpunkt der ersten Messung
t_2	...	Zeitpunkt der zweiten Messung
h_1	...	Füllstandshöhe im Standrohr zum Zeitpunkt t_1
h_2	...	Füllstandshöhe im Standrohr zum Zeitpunkt t_2

Eine grafische Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Füllstandshöhe (vgl. Abbildung 10) ist immer sehr hilfreich, um die Qualität der Ergebnisse zu beurteilen. Besonders am Anfang der Messung können aufgrund von Übergangsvorgängen[12] die Messpunkte außerhalb der „idealen“ $e - Funktion$ liegen. Dies sollte bei der Beurteilung der Versuchsergebnisse im Zusammenhang mit dem vorliegenden Material berücksichtigt werden.

Moderne Prüfgeräte (vgl. Abbildung 11) ermöglichen die kontinuierliche Aufzeichnung des Füllstand. Damit lassen sich erste Messergebnisse bereits während der Versuchsdurchführung online darstellen und bewerten.

[11]Hinweise: Potenzgesetz: $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$; Logarithmusgesetz: $ln(e^{x-y}) = x - y$

[12]Teilweise auch als *„Transiente“* bezeichnet

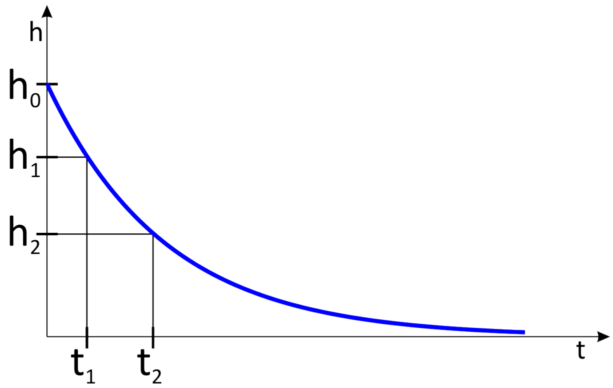


Abbildung 10: Qualitativer zeitlicher Verlauf der Füllstandshöhe

Abbildung 11: Vollelektronische Messbürette mit PC-Anschluss, kontinuierlicher Füllstandsmessung und Druckregelung. Typ: PPD.A der Firma Geomation GmbH

5 Temperaturabhängigkeit des Durchlässigkeitsbeiwertes k_f

Aufgrund der temperaturabhängigen Viskosität und Dichte des durchströmenden Mediums (Wasser), ist der Durchlässigkeitsbeiwert k_f ebenfalls temperaturabhängig. Deshalb ist bei der versuchstechnischen Bestimmung von k_f immer die Temperatur des strömenden Mediums (Wassertemperatur) zu erfassen. Diese Temperatur sollte während der gesamten Versuchszeit möglichst konstant bleiben. Mit Hilfe der Temperatur (bei der Versuchsdurchführung) ist man in der Lage, den Durchlässigkeitsbeiwert für Böden, die von Grundwasser mit einer durchschnittlichen Temperatur von 10°C durchströmt werden, zu berechnen. Die notwendige Korrekturfaktoren sind oft in Form von Tabellen vorhanden, lassen sich aber auch auf Grundlage von Gleichung 8 berechnen, denn die Durchlässigkeit K ist unabhängig von der Temperatur ($K = K_{10}$).

$$k_{f10} \cdot \frac{\eta_{10}}{\gamma_{w10}} = k_{fT} \cdot \frac{\eta_T}{\gamma_{wT}} \tag{38}$$

$$k_{f10} = \frac{\eta_T}{\eta_{10}} \cdot \frac{\gamma_{w10}}{\gamma_{wT}} \cdot k_{fT} \tag{39}$$

mit:

k_{f10}	...	Durchlässigkeitsbeiwert bei 10°C
k_{fT}	...	Durchlässigkeitsbeiwert bei Temperatur T
η_{10}	...	Viskosität des Mediums bei 10°C
η_T	...	Viskosität des Mediums bei Temperatur T
γ_{w10}	...	Wichte des Mediums bei 10°C
γ_{wT}	...	Wichte des Mediums bei Temperatur T

Die temperaturabhängige Änderung der Wichte des Wassers ist gegenüber der temperaturabhängige Änderung der Viskosität (des Wassers) so gering, dass sie im „normalen Laborbetrieb“ vernachlässigt werden kann. Gleichung 40 beschreibt deshalb die temperaturabhängige Korrektur des Durchlässigkeitbeiwertes hinreichend genau:

$$k_{f10} = \frac{\eta_T}{\eta_{10}} \cdot k_{fT} \tag{40}$$

6 Übersicht typischer Bereiche von Durchlässigkeitsbeiwerten k_f für Filter & Böden

$$\begin{aligned}
&\text{Ton} && \text{ca.} && k_f \approx 10^{-7} \cdots 10^{-12} \frac{m}{s} \\
&\text{Schluff} && \text{ca.} && k_f \approx 10^{-5} \cdots 10^{-9} \frac{m}{s} \\
&\text{Sand} && \text{ca.} && k_f \approx 10^{-3} \cdots 10^{-7} \frac{m}{s} \\
&\text{Kies} && \text{ca.} && k_f \approx 10^{-1} \cdots 10^{-2} \frac{m}{s} \\
&\text{Sintermetall} && \text{ca.} && k_f \approx 10^{-2} \cdots 10^{-4} \frac{m}{s} \\
&\text{Keramikfilter} && \text{ca.} && k_f \approx 10^{-2} \cdots 10^{-4} \frac{m}{s}
\end{aligned}$$

Die angegebenen Werte sind nur gültig, wenn die entsprechenden Materialien unverschmutzt sind. Deshalb sollten Filtersteine nach Gebrauch immer gründlich gereinigt[13] werden.

[13]z.B. Reinigung im Ultraschallbad